

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

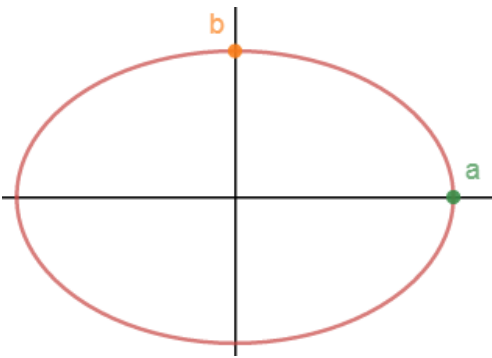
积分 - 457097
排名 - 1198

多变量微积分笔记11——变量替换

在二重积分中，极坐标替换是一种特殊情况，更一般的变量替换后的面积元是通过雅可比行列式来关联，替换后的积分域也会随之变动。

变量替换

二重积分可以计算面积，现在有一个椭圆 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ ，如何计算该椭圆的面积？



很容易写出 $Area = \iint_R dx dy$ ，积分区域是 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ ，现在的问题是如何计算的内外积分的积分域？这当然可以通过代数法转换，将 x 写作 y 的表达式，但这个复杂的表达式多少会有些尴尬。椭圆也不能轻松地转换为极坐标，因为 r 的上限也是变化的。

现在尝试一种新的方案，如果令 $u = x/a$ ， $v = y/b$ ，则椭圆将转换为 $u^2 + v^2 = 1$ ，退化成圆。对 u 和 v 计算微分：

$$du = \frac{dx}{a}, \quad dv = \frac{dy}{b}$$
$$\Rightarrow dx = a du, \quad dy = b dv$$
$$Area = \iint_{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1} dx dy = \iint_{u^2 + v^2 < 1} ab du dv = ab \iint_{u^2 + v^2 < 1} du dv$$

$\iint_{u^2 + v^2 < 1} du dv$ 是对单位圆面积的积分, 面积为 π

$$Area = ab \iint_{u^2 + v^2 < 1} du dv = ab\pi$$

变量替换的主要目的是简化被积函数或积分域，从而更容易地求得积分。

变量的变化率

上面方法将原变量表达式转化为一个新的简单变量，从而求得结果，其中最重要的步骤是求得 $dx dy$ 和 $du dv$ 之间的关系，那么对于更复杂的情况，这种方法还能否适用？

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

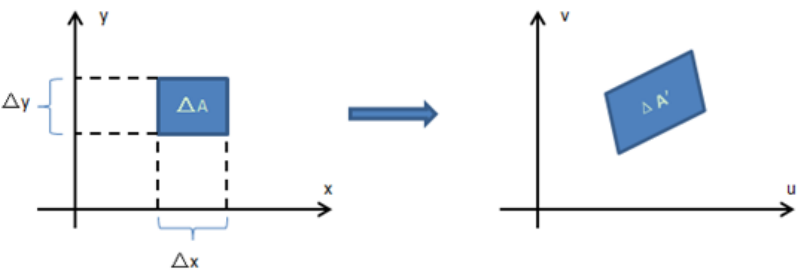
推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

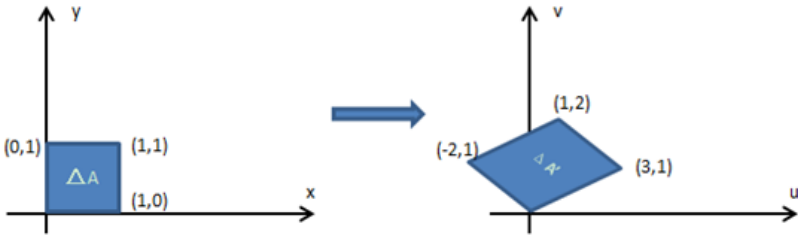
- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

假设出于某种目的, 我们做了这样的变换: $u = 3x - 2y$, $v = x + y$ 。现在 dA 是 xy 坐标系的面积积元, $dA = dx dy$; dA' 是 uv 坐标的面积积元, $dA' = du dv$ 。二重积分的思想是 ΔA 的面积乘以 ΔA 的函数值从而得到小柱体, 再把这些小柱体相加, 但是变换成 uv 坐标后, $\Delta A'$ 的面积并不等于 ΔA 的面积:



$\Delta A \neq \Delta A'$

这实际上是线性变换, 用一个简单的方法说明, 让 ΔA 是小正方形, $\Delta x = \Delta y = 1$, 变换后将得到一个平行四边形:



可以利用叉积求得 $\Delta A'$ 的面积:

$$\Delta A' = \langle 3, 1 \rangle \times \langle -2, 1 \rangle = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

由此可见, $\Delta A' = 5\Delta A$ 。

值得注意的是, 如果将 Δx 和 Δy 代入 u 和 v , 得到 $\Delta u = 3\Delta x - 2\Delta y$, $\Delta v = \Delta x + \Delta y$, 由于变换后的图形并不是正方形, 所以 $\Delta A' \neq \Delta u \Delta v$, $\Delta A'$ 是平行四边形两条边的向量的叉乘:

$$\Delta A' = \overrightarrow{\Delta u} \times \overrightarrow{\Delta v} = \begin{vmatrix} 3\Delta x & -2\Delta y \\ \Delta x & \Delta y \end{vmatrix} = 5\Delta x \Delta y$$

至此, 我们确定了 $dx dy$ 和 $du dv$ 之间的关系:

$$\Delta A' = 5\Delta A \Rightarrow du dv = 5 dx dy$$

$$\iint dx dy = \iint \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \iint du dv$$

雅可比行列式

如果二元积分的被积函数 $f(x,y)$ 中的变量被替换为 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 那么 u 和 v 的微小改变, 是轻轻扰动 x 和 y 的综合结果:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中\$ v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$
$$\Delta v \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$$

如果用矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

这实际上说明，对于线性变换，小矩形将转换为平行四边形，面积的放缩比例就是偏导的行列式。如果A = ΔxΔy是一个顶点在原点的矩形：

$$\begin{aligned} \langle \Delta x, 0 \rangle &\xrightarrow{\text{对}x\text{加以扰动}} \langle \Delta u, \Delta v \rangle \approx \langle u_x \Delta x, v_x \Delta x \rangle \\ \langle 0, \Delta y \rangle &\xrightarrow{\text{对}y\text{加以扰动}} \langle \Delta u, \Delta v \rangle \approx \langle u_y \Delta y, v_y \Delta y \rangle \\ A' &= \langle u_x \Delta x, v_x \Delta x \rangle \times \langle u_y \Delta y, v_y \Delta y \rangle = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \Delta x \Delta y = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

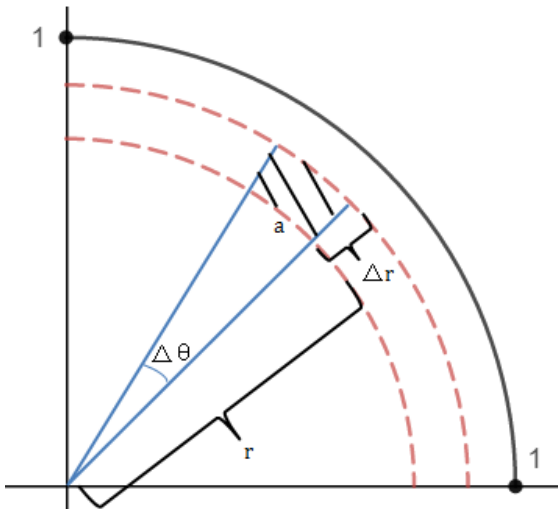
由于这个行列式的结果和转置后结果一致，所以放缩的倍数就是之①的矩阵行列式。这个行列式被称为雅可比行列式，用数学符号表示：

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$
$$dudv = |J| dx dy = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx dy$$

雅可比行列式描述了从xy坐标到uv坐标后，面积积元的变换比率。需要注意的是，雅可比行列式需要加上绝对值，因为行列式可能出现负值，但面积一定是正的。

用雅可比式验证极坐标

在《多变量微积分9——极坐标的二重积分》中提到过，从xy坐标转换到极坐标后，面积积元的变换率是 dx dy = r dr dθ：



$$\Delta A' \approx a \Delta r = \left(2\pi r \times \frac{\Delta \theta}{2\pi} \right) \Delta r = r \Delta \theta \Delta r$$
$$dA' = r dr d\theta$$

用雅可比式转换，注意此处是用x和y替换r和 θ ：

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) = r$$

$$dxdy = |J|drd\theta = rdrd\theta$$

这再一次说明数学是可以互相佐证的，高级理论可以证明低级理论，低级理论又可以为高级理论的提供推导步骤。

变量替换后的积分域

用变量替换计算下面的积分：

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 y dx dy, \quad u = x, v = xy$$

如果不使用变量替换，直接计算结果：

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 y dx dy = \int_0^1 \left. \frac{yx^3}{3} \right|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y}{3} dy = \left. \frac{y^2}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

在试用变量替换时，首先使用雅可比式计算dudv和dydx之间的比率，然后转换被积函数：

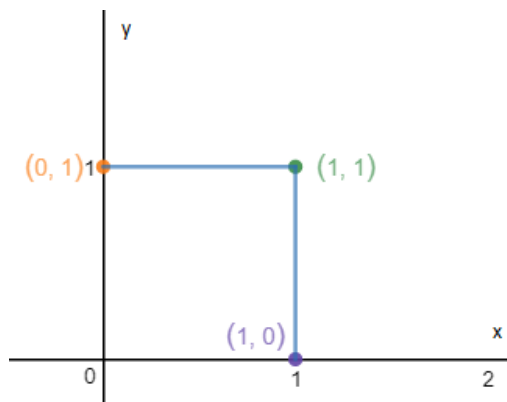
$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x$$

$$dudv = |J|dydx = xdydx$$

$$x^2 y dx dy = xy dudv = v dudv$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 y dx dy = \iint_{\gamma} v dudv$$

现在的主要问题是转换后的积分域。先来看xy坐标系，由于积分域 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ ，所以积分的范围就是一个正方形：

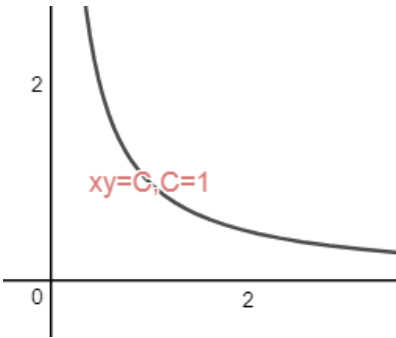


现在需要找出u和v是如何变化的。

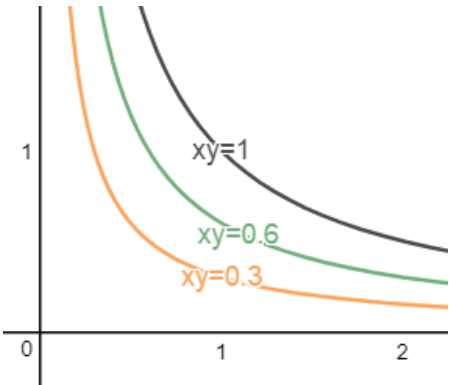
在原坐标系计算积分域

可以这样思考，对于 $\iint v dudv$ ，先计算内积分，也就是先对u积分，把v看作常量，u看作变量，也就是把 $v = xy$ 看作常量， $u = x$ 看作变量。把v =

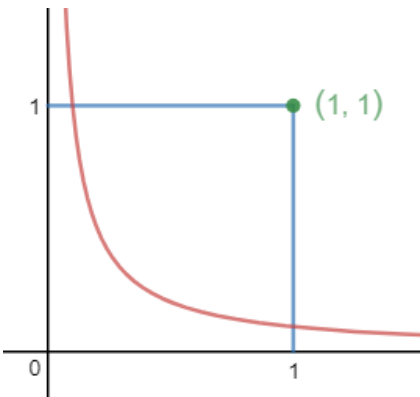
xy 看作常量，意味着 $xy = C$ 是一个双曲线：



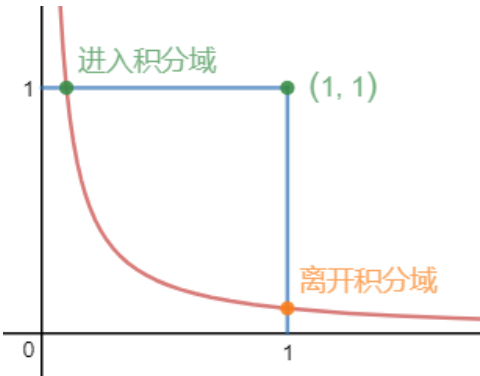
如果 v 的值固定，那么 v 就是双曲线上的一点。对于不同的 v ，能取到不同的双曲线：



把双曲线加入到正方形中：



现在 $u = x$ 是变量， $v = xy$ 是常量，这意味着当 x 变化时，就是在其中一条双曲线上移动。对于 $\int \int v du dx$ ，我们首先回答的问题是当 v 固定时， u 是积分域是什么？

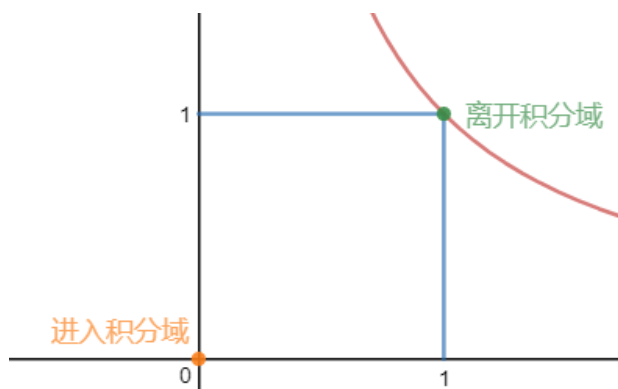


如上图所示，在离开积分域时， $u = x = 1$ ；在进入积分域时 $y = 1$ ，所以：

$$v = xy = uy = u$$

$$\iint_{\gamma} v du dv = \int_{\gamma} \int_v^1 v du dv$$

现在完成了内积分。对于外积分来说，就是在正方形区域内双曲线族所能达到的最大值和最小值：



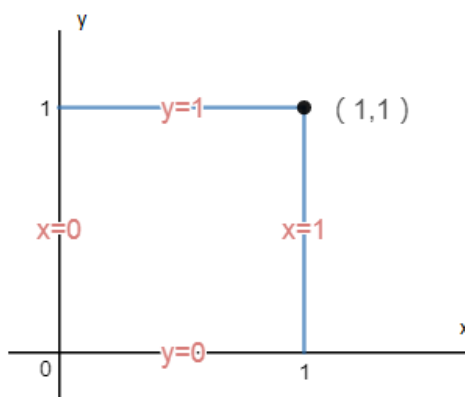
$$\int_{\gamma} \int_v^1 v du dv = \int_0^1 \int_v^1 v du dv$$

$$\int_v^1 v du = uv \Big|_{u=v}^{u=1} = v - v^2$$

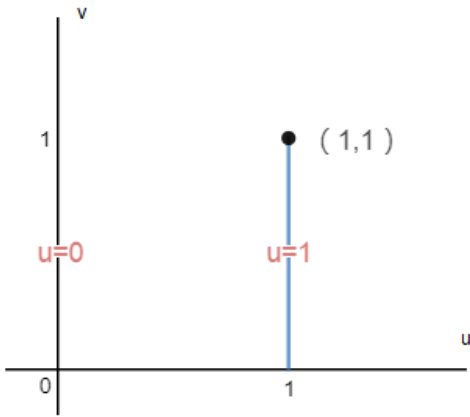
$$\int_0^1 (v - v^2) dv = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

通过坐标变换计算积分域

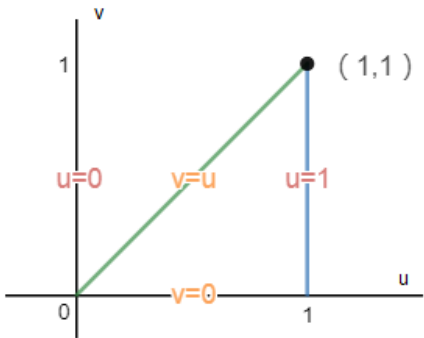
还可以通过坐标系变换的方式计算积分域。xy坐标系在转换成uv坐标系时，有4条边需要解释：



$x = 0$ 和 $x = 1$ 转换后：

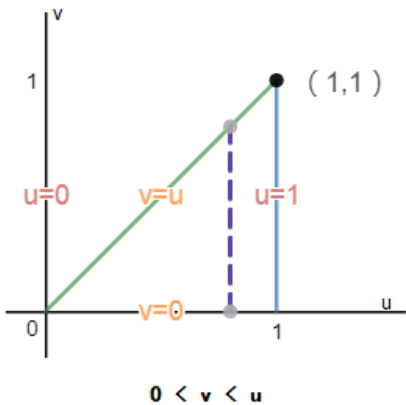


$y = 1$, 转换后, $v = xy = x = u$; $y = 0$, 转换后 $v = 0$:



转换后的积分域就是三角形围成的面积。

如果以u为外积分, v为内积分, 可以确定 $0 < u < 1$, v的取值如下图所示:



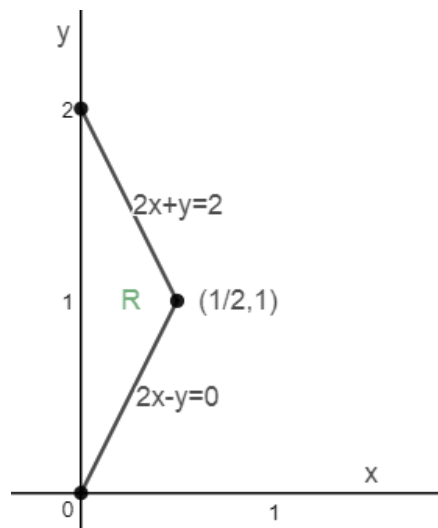
$$\int_0^1 \int_0^u v dv du = \int_0^1 \left(\frac{v^2}{2} \Big|_0^u \right) du = \int_0^1 \frac{u^2}{2} du = \frac{u^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

可以看到, 转换前后的计算结果相同。

综合示例

示例1

用变量替换计算积分 $\iint_R (4x^2 - y^2)^4 dx dy$, $u = 2x - y$, $v = 2x + y$, R区域如下图所示:



雅可比行列式:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(2x-y)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(2x-y)}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(2x+y)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(2x+y)}{\partial y} = 1$$

$$J = \frac{(\partial u, \partial v)}{(\partial x, \partial y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$dudv = |J|dxdy = 4dxdy$$

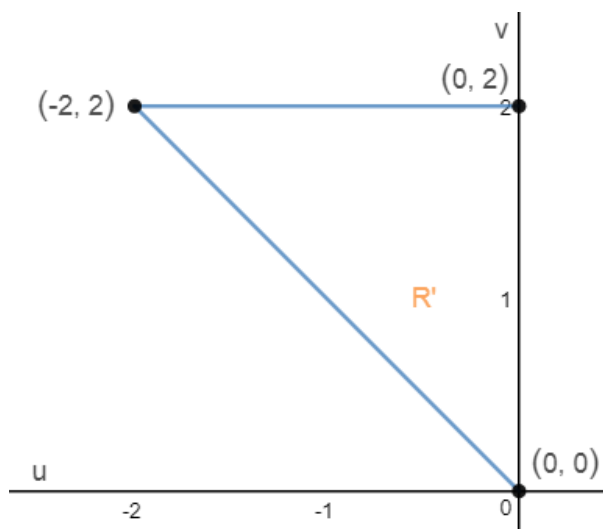
$$\Rightarrow dxdy = \frac{dudv}{4}$$

$$\iint_R (4x^2 - y^2)^4 dxdy = \iint_{R'} \frac{(uv)^4}{4} dudv$$

为了计算 R' ，尝试将 xy 坐标系转换为 uv 坐标系，只需要对边和点进行解释:

$$u = 2x - y, \quad v = 2x + y$$

$$(0,0) \xrightarrow{\text{change}} (0,0), \quad (0,2) \xrightarrow{\text{change}} (-2,2), \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \xrightarrow{\text{change}} (0,2)$$



对比两个三角形，R的面积 $R = 1/2(2 * 1/2) = 1/2$ ； R' 的面积 $R' = 1/2(2 * 2) = 2$ ； $R' = 4R$ ，坐标转换后面积放大了4倍，这也验证了雅可比表达式， $dudv = 4dxdr$ 。

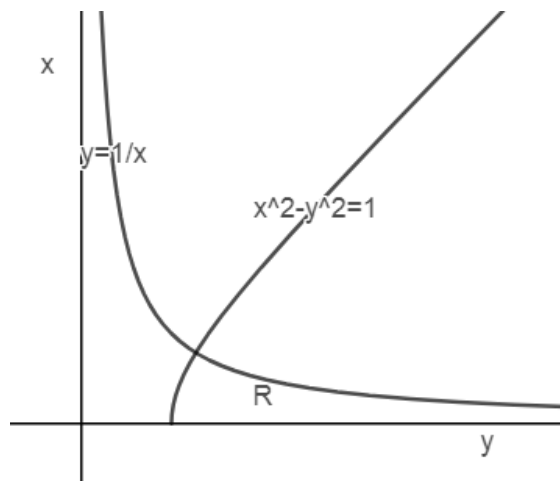
三角形的斜边是 $u = -v$ ，现在可以很容易得出转换后的积分域：

$$\int_0^2 \int_{-v}^0 \frac{(uv)^4}{4} du dv$$

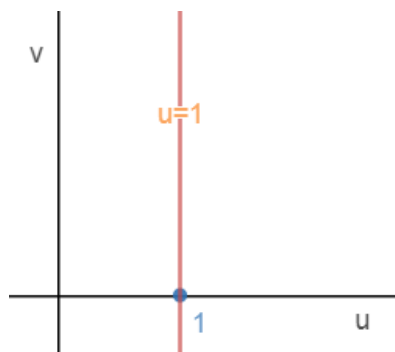
示例2

计算变量替换后的积分域。

$\iint_R 1/x^2 dx dy$ 变量替换 $u = x^2 - y^2$ ， $v = y/x$ ， xy 坐标系的R区域中第一象限，在 $y=1/x$ 下方， $x^2 - y^2=1$ 上方，如下图所示：



转换坐标系后， $u = x^2 - y^2 = 1$ ：

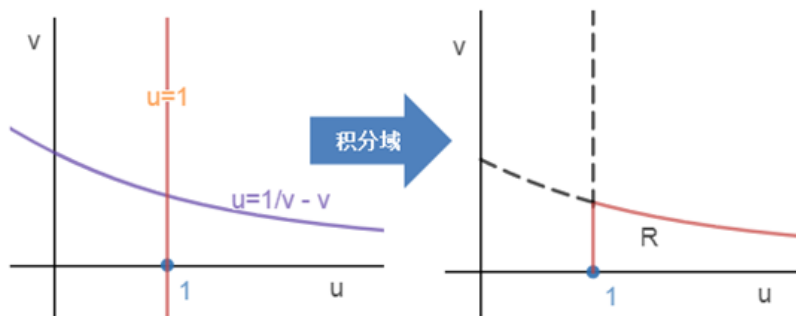


$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow v = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad v = \frac{y}{x} = \frac{y}{\frac{1}{y}} = y^2$$

$$\Rightarrow u = x^2 - y^2 = \frac{1}{v} - v$$

坐标系转移后：



设两条曲线的交点是(1,a)，可知积分域：

$$\iint_R \frac{1}{x^2} dx dy = \int_0^a \int_1^{\frac{1}{v}-v} ? du dv$$

雅可比行列式：

$$J = \frac{(\partial u, \partial v)}{(\partial x, \partial y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 - \frac{2y^2}{x^2} = 2 - 2v^2$$

$$dy dx = \frac{du dv}{J} = \frac{du dv}{2 - 2v^2}$$

现在需要用uv代替 $1/x^2$ ：

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, & v &= \frac{y}{x} \\ \Rightarrow 1 - v^2 &= \frac{x^2 - y^2}{x^2} = \frac{u}{x^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{x^2} &= \frac{1 - v^2}{u} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^2} dx dy \xrightarrow{\text{changed}} \frac{1 - v^2}{u} \frac{du dv}{2 - 2v^2} = \frac{du dv}{2u}$$

$$\iint_R \frac{1}{x^2} dx dy = \int_0^a \int_1^{\frac{1}{v}-v} \frac{1}{2u} du dv$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [雅可比行列式](#), [二重积分变量替换](#), [坐标转换](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

[+加关注](#)

1
[推荐](#)

0
[反对](#)

« 上一篇: [ML \(1\) ——机器学习简述](#)

» 下一篇: [微服务架构](#)

posted on 2018-03-29 16:53 [我是8位的](#) 阅读(6764) 评论(2) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS_文档在线
预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等, 特定格式的合作, 支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes